Varianta 10

Subiectul I

a) $\sqrt{29}$. b) $AC=\sqrt{2}$ .c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. d) $\begin{cases} a=1 \\ b=-13 \end{cases}$.e) $S_{ABC}=\frac{3}{2}$ .f) $a=\frac{11}{17}, b=\frac{7}{17}$.

Subiectul II

1. a) $\hat{6}^{2007}=\hat{6}$. b) $C_9^4-C_9^5=0$ .c) $x^2=t,\ t^2-3t+2=0,\ t_1=1, t_2=2$.
$x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm\sqrt{2}.$

d) Unica solutie reala este $x=1$. e) Probabilitatea ceruta este $\frac{4}{5}$.

2. a) $f'(x)=e^x+1$. b) $\int_0^1 f(x)dx=e+\frac{1}{2}$. c) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$.

d) $f''(x)=e^x>0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbf{R}$. e) $\frac{3}{2}$.

Subiectul III

a) $rangA=2 \Rightarrow \exists\, n,r\in\{1,2,3,4\}$ astfel ca $\det\begin{pmatrix} a_n & a_r \\ b_n & b_r \end{pmatrix}\neq 0$.

b) $B=A^T\cdot A=\begin{pmatrix} a_1^2+b_1^2 & ... & a_1a_4+b_1b_4 \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_4a_1+b_4b_1 & ... & a_4^2+b_4^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & ... & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_4 \\ \vdots & ... & \vdots \\ \vec{v}_4\cdot\vec{v}_1 & ... & \vec{v}_4\cdot\vec{v}_4 \end{pmatrix}$.

c) $rangB\le \min\{rangA^T, rangA\}=2$.

d) Deoarece $rangB\le 2$ şi $B\in M_4(R)\Rightarrow \det B=0$.

e) Considerăm vectorii $\vec{v}_n, 1\le n\le 4,$ cu originea în $O(0,0)$. Cum suma unghiurilor în jurul lui O este 360° rezultă că cel puțin unul din unghiurile formate de doi vectori alăturați este cel mult 90°.

f) Evident $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}\ge 0$ şi cum mai există 2 vectori $\vec{v}_n, \vec{v}_r, n\neq r,$ care au unghiul dintre ei de cel mult 90° rezultă că $b_{nr}=b_{rn}=\vec{v}_n\cdot\vec{v}_r=|\vec{v}_n|\cdot|\vec{v}_r|\cdot\cos\alpha\ge 0$. Deci matricea B are cel putin 6 elemente nenegative.

g) Calcul direct.

Subiectul IV

a)Calcul direct. b)Calcul direct. c) $\lim_{n\to\infty} e_n(a)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+a}{n}}=e$.

d)Să observăm că are loc relația: $e_n(a)=e^{f_a(n)}, n\in \mathbf{N}^*$, deci, $e_n(0)=e^{f_0(n)}$.

Cum $f''(x) = -\dfrac{x}{x^2(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$, rezultă că f_0' este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$, deci $f_0'(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f_0'(x) = 0, \forall x > 0,$ deci f_0 este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deci $(e_n(0))_{n\geq 0}$ este strict crescător.

e) Din $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală.

f) Arătăm că $f_{\frac{1}{2}}$ și f_1 sunt funcții strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. Avem

$f_{\frac{1}{2}}''(x) = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0, \forall a \in (0,\infty) \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}'$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$., deci $f_{\frac{1}{2}}'(x) < \lim\limits_{x\to\infty} f_{\frac{1}{2}}'(x) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}$ este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. Analog se arată că f_1 este strict descrescătoare.

g) Arătăm că $a = \dfrac{1}{2}$ este numărul căutat. Dacă $a \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ rezultă că ecuația $f_a''(x) = 0$ admite rădăcina $x_0 = \dfrac{a}{1-2a} > 0$. Ținând seama de semnul lui f_a'' rezultă că f_a' este descrescătoare pe $[x_0,\infty) \Rightarrow f_a'(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f_a'(x) = 0, \forall x \in [x_0,\infty),$ deci f_a este crescătoare pe $[x_0,\infty)$. Prin urmare șirul $(e_n(a))_{n\geq x_0}$ este strict crescător dacă $a \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right)$. Deci $a = \dfrac{1}{2}$ este numarul cautat.